

TALLER

VISUALIZACIÓN DE LA GEOMETRÍA: CONSTRUCCIONES CON REGLA Y COMPÁS

M.Sc. Ana Lucía Alfaro Arce, aalfar@una.ac.cr
Escuela de Matemática, Universidad Nacional de Costa Rica

Bach. Yendry Arguedas Flatts, yargueda@una.ac.cr
Escuela de Matemática, Universidad Nacional de Costa Rica
Escuela de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Estatal a Distancia

RESUMEN

Debido al tiempo disponible para desarrollar las clases de Matemática en secundaria y a la proliferación de herramientas tecnológicas como los programas: Cabri, GeoGebra, Geometra Sketchpad, entre otros, las construcciones de figuras geométricas por medio de la regla y el compás se han visto reemplazadas o limitadas. Sin embargo, son varias las instituciones de secundaria de nuestro país, que carecen de recursos tecnológicos como los mencionados y por esta razón, se hace necesario que los profesores(as) de Matemática puedan construir figuras geométricas de manera concreta y correcta, para ayudar al estudiante a visualizar las propiedades que estas poseen; además, facilitar la solución de problemas, estimular la creatividad y la imaginación. Los procedimientos seguidos en la construcción de figuras geométricas, mediante la regla y el compás, le permiten al alumno comprender las definiciones, conceptos y teoremas de geometría, puesto que estimula el desarrollo de habilidades y destrezas de razonamiento para la abstracción y la intuición. Los software especializados constituyen una valiosa herramienta para la enseñanza de la Geometría; no obstante, todo docente de Matemática debe ser capaz de realizar construcciones geométricas (en el pizarrón o en material concreto) apoyándose con recursos básicos y al alcance de los estudiantes como lo son la regla y el compás.

PALABRAS CLAVES: Geometría, construcciones, regla, compás.

1. INTRODUCCIÓN

El Programa de Estudio de Matemática del III Ciclo del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (MEP) (2005) indica que:

“Los docentes deben comprender que su misión como formadores de personas, no se debe limitar a transmitir conocimientos y a la consolidación de cualidades de tipo afectivo como lo son la autoestima, las relaciones interpersonales y de inserción social, sino que, también debe tomar en cuenta como propósito relevante, el desarrollo de habilidades mentales” (p. 18).

Vilchez y Ulate (2008) señalan en su trabajo de Teorías del aprendizaje aplicadas en la visualización geométrica que:

“Como parte de las características de la disciplina del arte y comunicación visual, se forma al individuo en la observación de lo que le rodea, se insiste tanto en ello, que este individuo seguirá un proceso constante para alcanzar esta meta, en el momento que adquiere un nivel; ininterrumpidamente, ejecuta esta acción de

forma continua, para llevarla a categorías más puras y minuciosas. Elaborar una y otra vez este “ejercicio” dentro de una serie de síntesis y adquisición (Piaget), crea una realidad, lista de nuevo a verificación y replanteamiento de una imagen; de aquí se parte, para explicar como la “observación” llevada a niveles de “visualización” y relación como formas geométricas permite preparar y motivar al estudiante en esta área” (p. 6).

Un tema que permite el desarrollo de habilidades mentales; además, incentiva la creatividad de los estudiantes; así como la observación y visualización es Geometría. Por esta razón, se pensó en este taller (dirigido a profesores(as) de Matemática que laboran en las instituciones de secundaria de Costa Rica), como una propuesta para construir correctamente figuras geométricas (utilizando solamente regla y compás) que ayuden en la visualización de las propiedades y teoremas que se deben desarrollar como contenidos, según los programas de estudio del MEP; y de manera que, los estudiantes logren la comprensión de ejercicios y problemas al construir concretamente las figuras y establecer relaciones entre los segmentos, rectas, círculos, etc.

Las construcciones geométricas juegan un papel importante; puesto que por un lado, se presentan implícitas en la vida cotidiana de los estudiantes, y por otra parte, permiten caracterizar los conceptos geométricos mediante sus propiedades y principios matemáticos. Los antiguos griegos descubrieron todas las construcciones geométricas con regla y compás (algunas de las cuales elaboramos en este taller).

Seguidamente se enuncian los objetivos del taller. En el siguiente apartado un marco teórico sobre los orígenes de las construcciones de geometría, elaboradas únicamente, con regla y compás (aceptados por los matemáticos de la antigüedad como únicos instrumentos permitidos), luego aparece la metodología utilizada en el taller y las actividades a desarrollar. Otro apartado es de conclusiones y recomendaciones; y por último, las referencias bibliográficas utilizadas.

1.1. OBJETIVO GENERAL DEL TALLER

Utilizar la regla y el compás para la construcción de figuras geométricas que se estudian en secundaria.

1.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Construir figuras geométricas básicas utilizando únicamente la regla y el compás.
2. Verificar gráficamente las propiedades fundamentales de las diferentes figuras geométricas.
3. Resolver algunos problemas de geometría mediante el uso de la regla y el compás.

2. MARCO TEÓRICO

“Los Elementos de Euclides son agrupados en trece libros. Los libros I, III, IV y VI tratan de geometría plana y los libros XI-XIII contienen geometría del espacio. Además, están los libros II (álgebra elemental en lenguaje geométrico), V (teoría general de proporciones), VII-IX (aritmética) y X (clasificación de cantidades irracionales). El tono de la obra es de extremo rigor (aunque no está libre de defectos) y ciertamente no es adecuada como un texto elemental, aunque ha sido usado en varias épocas como tal” (Varilly, 1988).

La cumbre de la civilización antigua la constituyen la geometría de Euclides y la filosofía de Platón y Aristóteles. Ambas fueron de gran calidad y tan influyentes que perduraron durante dos milenios. Alrededor del año 300 a.C, una sistematización de todos los descubrimientos de la geometría griega fueron escritos en la obra los Elementos de Euclides, donde se resaltan cuatro aspectos notales, a saber: el autor hace un serio intento por basar todo su trabajo en una colección de definiciones y postulados elementales, insiste en la justificación de cada paso de una proposición por medio de los postulados y proposiciones anteriores, se ilustra cada proposición con un dibujo; pero, sin utilizar el dibujo en los pasos de la demostración y por último Euclides acepta solo dos instrumentos para trazar líneas rectas o curvas entre dos puntos dados: la regla y el compás (Varilly, 1988).

Platón concibió la regla y el compás como instrumentos ideales (sin marcas de medición como las cosas mecánicas). No obstante, luego surgieron tres problemas que no se pueden resolver con regla y compás: la duplicación del cubo, la trisección del ángulo y la cuadratura del círculo.

A mediados del siglo XIX se demostró matemáticamente que es imposible resolver dichos problemas; sin embargo, estos resistieron durante 2000 años los incontables intentos de encontrar construcciones que los resolvieran con regla y compás definidos como en la antigüedad (Wikipedia, 2008).

Varilly (1988) señala que la regla y el compás utilizados por Platón y Euclides son diferentes a los modernos en dos aspectos fundamentalmente. Primeramente, la regla no es una regla milimétrica; es decir, no posee calibraciones ni graduaciones de ningún tipo para cumplir la función secundaria de medir distancias (es un instrumento que solo permite trazar una línea recta entre dos puntos dados). Por otra parte, el compás puede trazar un círculo cuyo centro es un punto dado y que pasa por un segundo punto dado.

Velasco (1983) indica que el compás utilizado en la antigüedad estaba hecho de tal forma que al levantar cualquiera de sus piernas del papel se cerraba automáticamente; así que, era imposible transferir directamente la medida de un segmento de un lugar a otro; sin embargo, funcionaba perfectamente mientras ambas puntas estuviesen haciendo contacto con el papel

Las construcciones geométricas que utilizan únicamente la regla y el compás (entendidos como en la Grecia antigua) son interesantes porque permiten que los estudiantes desarrollen habilidades de pensamiento y creatividad; ya que, solo se basan en intersecciones entre rectas, intersecciones entre círculos e intersecciones entre rectas y círculos. Los instrumentos de medición modernos no son necesarios para realizar estas construcciones; aunque, como se mencionó antes, hay problemas que no se pueden resolver por regla y compás.

Velasco (1983) señala que “Los dibujos geométricos claros, nítidos y trazados con precisión son muy bellos y de aspecto agradable. El estudiante deberá esmerarse en ir perfeccionando su habilidad para hacer buenos dibujos” (pág. 169).

Aunque en los últimos tiempos ha proliferado el uso de herramientas tecnológicas; y particularmente, para la ilustración de conceptos de geometría; también, es cierto que no todas las instituciones de secundaria de Costa Rica tienen acceso a este tipo de tecnologías. Por otra parte, como bien lo señala Velasco (1983), en Matemáticas cuando se construye o demuestra algo de considerable dificultad utilizando un mínimo de recursos se dice comúnmente que se hace “con elegancia”; así que, mientras menos recursos y artificios se empleen más bella y elegante es una construcción o demostración.

Existe una gran cantidad de problemas que se pueden resolver usando exclusivamente una regla de un borde (Velasco, 1983). En este taller veremos algunas construcciones que serán de utilidad para el desarrollo de los contenidos geométricos que incluyen los Programas de estudio, de secundaria, del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (MEP).

3. MATERIALES Y METODOLOGÍA

3.1. MATERIALES

1. Una regla para cada participante en el taller.
2. Un compás para cada participante en el taller.
3. Un lápiz de escribir para cada participante en el taller.
4. Hojas bond, cartulina, o papel de construcción.
5. Un pizarrón, marcadores de colores o tizas.
6. Un compás y una regla para pizarrón.
7. Un retroproyector multimedia y una computadora.

3.2. METODOLOGÍA

Las facilitadoras del taller explican como se construyen figuras geométricas básicas utilizando únicamente la regla y el compás “ideales”; esto quiere decir, concebidos como en la antigüedad. Se discuten los conceptos y las propiedades inmersas en las figuras que se elaboran. Posteriormente, los participantes (divididos en subgrupos) construyen, en hojas bond o en cartulina, otras figuras siguiendo una guía de trabajo que las facilitadoras elaboraron para esta actividad. Luego cada subgrupo expone su construcción a los demás. Finalmente, se realiza una plenaria donde se discuten las ventajas, formas de implementación o dificultades que perciben los participantes, al trabajar con sus estudiantes de secundaria, las construcciones con regla y compás.

4. ACTIVIDADES

Las facilitadoras guían a los participantes en todas las construcciones que se realizan en el taller, cada una de ellas se detalla a continuación. Primeramente, se elaboran las construcciones básicas que sirven de base para las otras.

4.1. CONSTRUCCIONES BÁSICAS

- a) Un ángulo congruente a uno dado.
- b) Recta perpendicular a otra en un punto de esta.
- c) Recta perpendicular a otra en un punto exterior a esta.
- d) Bisección de un ángulo.

- e) Bisección de un segmento.
- f) Segmento de recta congruente a otro dado.
- g) Recta paralelas.
- h) Círculo que pasa por tres puntos dados.
- i) Cuadriláteros y polígonos (triángulos, cuadrados, rectángulos, rombos, hexágonos, octógonos)

4.2. CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS QUE UTILIZAN LAS BÁSICAS

En esta sección utilizamos las construcciones básicas anteriores, para hacer otras que a continuación se presentan.

- a) Alturas, medianas, mediatrices y bisectrices de un triángulo.
- b) Construir una tangente a una circunferencia que pasa por un punto dado de la circunferencia.
- c) Construir una tangente a una circunferencia que pasa por un punto exterior dado de la circunferencia.
- d) Romboide.
- e) Polígono (cuadrado, triángulo, octógono) inscrito en una circunferencia.

4.3. PROBLEMAS Y EJERCICIOS PROPUESTOS

Se proponen ahora algunos problemas y ejercicios a los participantes que se pueden resolver con lo visto hasta el momento.

- a) Construir un ángulo de 60° , 30° y de 45° .
- b) Dados los segmentos de medidas a y b construir otros que midan $a + b, 2a + b$.
- c) Dados los ángulos $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$ construir uno cuya medida sea $A + B$.
- d) Construir un triángulo rectángulo y la altura sobre la hipotenusa.
- e) Construir un paralelogramo con dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.
- f) Construya un paralelogramo conociendo la medida de dos lados que forman un ángulo de 60° .
- g) Construir un paralelogramo dadas las diagonales y uno de los lados.
- h) Construir un triángulo isósceles conociendo: uno de los lados congruentes y el ángulo desigual, uno de los lados congruentes y el ángulo formado por este

segmento y el desigual, uno de los lados congruentes y el ángulo correspondiente al lado desigual.

- i) Triángulos semejantes y congruentes.
- j) Encontrar el centro de una circunferencia construida con una moneda.
- k) Circunscribir una circunferencia a un triángulo.
- l) Inscribir una circunferencia a un triángulo.
- m) Polígonos inscritos y circunscritos en una circunferencia.

4.4. VERIFICACIÓN GRÁFICA DE PROPIEDADES GEOMÉTRICAS

- a) Verificar que en cualquier triángulo las rectas notables (mediatriz, mediana, bisectriz) son concurrentes; es decir, se intersecan en un solo punto.
- b) Verificar que la diferencia entre el suplemento y complemento de un ángulo cualquiera es igual a la medida de un ángulo recto.
- c) Verificar que en un triángulo isósceles y equilátero la mediana, mediatriz y altura sobre un lado, y la bisectriz del ángulo opuesto a dicho lado coinciden.

5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1. CONCLUSIONES

1. El tema Geometría, en cualquier nivel educativo, permite desarrollar, en los estudiantes, capacidades de observación, visualización y creatividad que posibilita el desarrollo de habilidades intelectuales y mentales como: análisis abstracto, la identificación, la comparación, la clasificación, la codificación, el análisis hipotético deductivo, la síntesis y la conceptualización.
2. Construir correctamente las figuras geométricas, en la pizarra, para explicar los contenidos de Geometría ayuda significativamente, a los estudiantes, en la visualización de las propiedades que poseen y en la comprensión de los teoremas.
3. Es necesario conocer el procedimiento de las construcciones geométricas básicas, para la elaboración de otras frecuentes en los problemas y ejercicios que se desarrollan en secundaria.
4. En la actualidad, existen métodos quizás un poco más fáciles y rápidos para realizar las construcciones geométricas; sin embargo, las elaboradas con regla y compás

permiten desarrollar habilidades de pensamiento que no se logran con los métodos simples y mecánicos.

5. Es importante, introducir en las lecciones de Matemática, aspectos de la historia de esta disciplina. En particular, las construcciones con regla y compás posibilitan este aspecto; ya que, en la antigüedad eran los dos instrumentos básicos y aceptados para elaborar construcciones geométricas.

5.2. RECOMENDACIONES

1. El docente de Matemática debe potenciar, en sus lecciones, la realización de actividades en donde el estudiante tenga que hacer, construir, discutir, comparar y deducir conceptos.
2. Los profesores(as) de Matemática, deben utilizar material concreto y sencillo, que sea de fácil acceso; es decir, que esté al alcance de los estudiantes.
3. Los educadores, deben utilizar problemas y ejercicios que permitan confrontar a los estudiantes con situaciones cotidianas del entorno en donde ellos se desenvuelven.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Barnett, R. Geometría Plana con Geometría de Coordenadas. Serie de compendios Schaum. Editorial McGraw – Hill. Colombia.

Ministerio de Educación Pública. (2005). Programas de Estudio de Matemática del III Ciclo. Relanzamiento de la Educación Costarricense. San José, Costa Rica.

Varilly, J. (1988). Elementos de la Geometría Plana. Primera edición. Editorial Universidad de Costa Rica. Costa Rica.

Velasco, G. (1983). Tratado de Geometría. Primera edición de la Editorial LIMUSA, S.A. México.

Vilchez, E., Ulate, G. (2008, agosto). Teorías del Aprendizaje aplicadas en la Visualización geométrica con Apoyo de Cabri 3D. En I Congreso Internacional de Computación y Matemática (I CICMA). Congreso efectuado en la Universidad Nacional de Costa Rica. Heredia, Costa Rica.

Regla y compás (2008, 16 de agosto). Wikipedia, *La enciclopedia libre*. Fecha de consulta: 30 de agosto del 2008 en http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Regla_y_comp%C3%A1s&oldid=19491372.